Методические рекомендации

по способам решения заданий демонстрационного варианта

в номинации «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»

направление «Инженерно-техническое».

Задача 5, 6

(математика)

НИУ МГСУ

2024г.

Задание 5.

Решите уравнение:

$$t^2 + \left(\sqrt[4]{1 - t^2}\right)^4 = \cos 8t$$

В ответе укажите количество решений уравнения, принадлежащих отрезку [0;1,5π], считая π=3,14, выберите один верный вариант ответа:

1) 2;

2) 5;

3) 7;

4) 1;

5) 0.

Ответ: 1

Задача требует знаний тригонометрии, умения решать простейшие тригонометрические уравнения, знать области определения элементарных функций.

Алгебраические преобразования достаточно простые, но важно внимательно учитывать ограничения.

Для получения ответа следует также произвести отбор корней, принадлежащих заданному отрезку и в ответе указать количество полученных корней.

Трудности могут возникнуть при анализе условий определения функции и правильного нахождения всех решений на заданном интервале.

Задача имеет умеренную сложность, решаема при наличии базовых знаний тригонометрии и навыков работы с областью определения функций.

Рассмотрим различные подходы при решении данной задачи.

Вариант №1.

Давайте решим уравнение:

$$t^2 + \left(\sqrt[4]{1 - t^2}\right)^4 = \cos 8t$$

Шаги решения:

1. Упростим уравнение:

   Заметим, что $\left(\sqrt[4]{1 - t^2}\right)^4 = (1 - t^2)$, так как взятие четвертой корня и возведение в четвертую степень возвращает исходное значение.

   Тогда уравнение примет вид:

   $$t^2 + (1 - t^2) = \cos 8t$$

   Упростим его:

   $$1 = \cos 8t$$

2. Рассмотрим уравнение $1 = \cos 8t$:

   Косинус равен 1 в точках:

   $$8t = 2\pi k, k \in Z$$

   Отсюда находим:

   $$t = \frac{\pi k}{4}, k \in Z$$

3. Определим значения t, принадлежащие отрезку [0;1.5π]:

   Нам нужно найти такие значения t, для которых $t \in [0;1.5\pi]$:

   Подставим граничные значение отрезка:

   $$0 \leq \frac{\pi k}{4} \leq 1.5\pi$$

   Разделим все на π:

   $$0 \leq \frac{k}{4} \leq 1.5$$

Умножим на 4:

$$0 \leq k \leq 6$$

Значения k в этом диапазоне: k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

теперь найдём соответствующие значения t:

$$t_0 = \frac{\pi \cdot 0}{4} = 0, \quad t_1 = \frac{\pi \cdot 1}{4} = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{\pi \cdot 2}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad t_3 = \frac{\pi \cdot 3}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

$$t_4 = \frac{\pi \cdot 4}{4} = \pi, \quad t_5 = \frac{\pi \cdot 5}{4} = \frac{5\pi}{4}, \quad t_6 = \frac{\pi \cdot 6}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

теперь проверим, какие из этих значений принадлежат отрезку $[0;1.5\pi]$:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}, \quad t_3 = \frac{3\pi}{4}, \quad t_4 = \pi, \quad t_5 = \frac{5\pi}{4}.$$

$t_6 = \frac{\pi \cdot 6}{4} = 1.5\pi$ выходит за границы отрезка, поэтому оно не учитывается.

4. Проверим, какие из них удовлетворяет исходному уравнению:

Все найденные значения t0, t1, t2, t3, t4, t5 удовлетворяют уровнению

$$\cos 8t = 1.$$

Однако нужно помнить, что искомое уравнение включает дополнительные ограничения, связанные с доменом определения $\sqrt[4]{1 - t^2}$.

$$1 - t^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 \leq 1 \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

Поскольку рассматриваем только отрезок $[0;1.5\pi]$, нам нужно, чтобы:

$$t \in [0; 1]$$

Следовательно, из значений $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$, $t_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$,

только t_0 и t_1 лежат в диапазоне $[0; 1]$.

5. Итоговое количество решений:

   Решения: $t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{\pi}{4}$

   Количество решений: 2.

<u>Вариант №2.</u>

Задача сводится к решению уравнения cos 8t =1 с учетом условия $1\text{-}t^2 \geq 0$.

Строятся графики двух функций y= cos 8t и y=1. Из всего множества точек пересечения графиков выбираем только те, что принадлежат обоим отрезкам [-1;1] и [0;1,5 π].

Количество этих точек 2.

<u>Вариант №3.</u>

Для отбора корней можно воспользоваться тригонометрическим кругом.

Этим способом наиболее часто пользуются учащиеся.

Задача 6.

Сложная функция x(t)=3,5+f(t-3,5) задаёт координату движущейся материальной точки на числовой оси в момент времени t (сек). Функция f(t) – нечётная, определена на всей числовой оси, причём x(0) = -3,5.

Вычислите сумму координат:

x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5) + x(6).

Выберите один верный вариант ответа:

1) 17,5;

2) 7;

3) 24,5;

4) 0;

5) -3,5.

Ответ: 1

Задача требует знания понятий четных и нечётных функций и их свойств.

Вычисления достаточно просты, основное внимание нужно уделить правильному использованию свойств функции.

Трудности могут возникнуть у тех, кто не знаком с понятиями чётных и нечётных функций.

Рассмотрим различные подходы при решении данной задачи.

Вариант №1.

Решение задачи:

Дана функция $x(t) = 3.5 + f\ (\mathrm{t} - 3.5)$, которая описывает координату движущейся материальной точки на числовой оси в момент времени t.

Известно, что функция f(t) – нечетная, определена на всей числовой оси, и x(0) = -3,5.

Необходимо вычислить сумму координат:

$$x\ (0) + x\ (1) + x\ (3) + x\ (4) + x\ (5) + x\ (6).$$

Шаги решения:

1. Найдем значение $x\ (0)$:

Подставим $\mathrm{t} = 0$ в выражение для $x\ (t)$:

$$x\ (0) = 3{,}5 + f\ (0 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (3{,}5).$$

По условию $x\ (0) = -3{,}5$, значит:

$$3{,}5 + f\ (-3{,}5) = -\ 3{,}5.$$

Тогда:

$$f\ (-3{,}5) = -3{,}5 - 3{,}5 = \ -7.$$

2. Используем нечётность функции $f\ (t)$:

Поскольку $f\ (t)$ нечётная , то:

$$f\ (-t) = \ -f\ (t).$$

Отсюда:

$$f\ (3{,}5) = \ -f\ (-3{,}5) = 7.$$

3. Определим координаты для остальных значений t:

Для t = 1:

$$x\ (1) = \ 3{,}5 + \ f\ (1 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (-2{,}5).$$

Пусть $f\ (-2{,}5) = \ -\mathrm{a}$, тогда $f\ (2{,}5) = \ \mathrm{a}$, $x\ (1) = \ 3{,}5 - \mathrm{a}$.

Для t = 2:

$$x\ (2) = \ 3{,}5 + \ f\ (2 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (-1{,}5) = 3{,}5 - b.$$

Пусть $f\ (-1{,}5) = \ -b$, тогда $f\ (1{,}5) = \ b$.

Для t = 3:

$$x\ (3) = \ 3{,}5 + \ f\ (3 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (-0{,}5) = 3{,}5 - c.$$

Пусть $f\ (-0{,}5) = \ -c$, тогда $f\ (0{,}5) = \ c$.

Для t = 4:

$$x\ (4) = \ 3{,}5 + \ f\ (4 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (0{,}5) = 3{,}5 + c.$$

Для t = 5:

$$x\ (5) = \ 3{,}5 + \ f\ (5 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (1{,}5) = 3{,}5 + b.$$

Для t = 6:

$$x\ (6) = \ 3{,}5 + \ f\ (6 - 3{,}5) = 3{,}5 + f\ (2{,}5) = 3{,}5 + a.$$

4. Вычислим сумму координат:

$$\text{Сумма} = \ x\ (0) + \ x\ (1) + x\ (2) + x\ (3) + x\ (4) + x\ (5) + x\ (6)$$

Подставляем значения:

$$(-3{,}5) + \ (3{,}5 - a) + (3{,}5 - b) + (3{,}5 - c) + (3{,}5 + c) + (3{,}5 + b) + (3{,}5 + a)$$

Заметим, что все члены с переменными a, b и с сокращаются:

-3,5+3,5-+3,5+3,5+3,5+3,5+3,5=17,5.

Ответ: 1

<u>Вариант №2.</u>

Центр симметрии графика функции x(t) находится в точке М (3,5 ; 3,5). Абсциссы точек 1 и 6; 2 и 5; 3 и 4 симметричны относительно значения 3,5. Значения функции в связи с симметрией графика относительно точки М попарно дают в сумме 7.

X(1) +x(6) =7; x(2) +X(5) =7; x(3) +x(4) = и x(0) =-3,5, то сумма 7+7+7-3.5=17.5

Ответ: 1

<u>Вариант №3.</u>

Воспользуемся свойством нечетной функции x(-t) =-x(t). Подставим числовые значения.

$$\begin{aligned} x(0) + \mathrm{x}(1) + \mathrm{x}(2) + \mathrm{x}(3) + \mathrm{x}(4) + \mathrm{x}(5) + \mathrm{x}(6) \\ &= (-3.5) + \big(3{,}5 + \mathrm{x}(1 - 3{,}5)\big) + \big(3{,}5 + \mathrm{x}(2 - 3.5)\big) \\ &+ \big(3{,}5 + \mathrm{x}(3 - 3{,}5)\big) + \big(3{,}5 + \mathrm{x}(4 - 3{,}5)\big) + \big(3{,}5 + \mathrm{x}(5 - 3{,}5)\big) \\ &+ \big(3{,}5 + \mathrm{x}(6 - 3{,}5)\big) \\ &= \mathrm{x}(-2{,}5)\ + \mathrm{x}(-1{,}5)\ + \mathrm{x}(-0{,}5)\ + \mathrm{x}(0{,}5)\ + \mathrm{x}(1{,}5)\ + \mathrm{x}(2.5) \\ &+ 17.5 = 17.5 \end{aligned}$$

Ответ: 1